一、宏观态的不确定性，香农熵

有一系列事件，概率依次为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$. 衡量不确定程度？

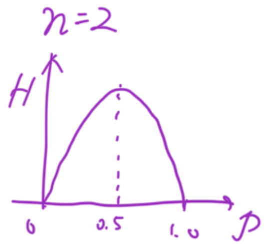
用 $H(p_1,\cdots,p_n)$ 表示，应有如下性质

1. 仅有一个 $p_i=1$（其余 $p_i=0$），无不确定 $H(p_i=1)=0$.
2. 只要有不止一个 $p_i\neq 0$. 有不确定，$H(p_1\cdots p_n)>0$
3. 固定 n，所有 $p_i=\frac{1}{n}$ 时，最不确定，H 最大
4. 粗粒化性质（重要但暂搁）
5. H 是 p_i 的连续函数（物理上默认）

……

香农选择 5, 3, 4 为基本性质，证明 H 必取

$$H(\{p_i\}) = -K\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$



下证明 1, 2 成立（K 已取 1）

1. $H=-1\log 1=0$
2. $0<p_i<1$，$\log p_i<0$ $\quad H>0$

物理中天然应用：热力学——宏观态与微观态

$\boxed{p,V,T}$ $\begin{cases}\text{微观态}\\ \vdots\end{cases}$ 随机抽着停，停到某微观态有概率 p_i

- 微正则：$p_i=\frac{1}{\Omega}$，$S=\log\Omega$
- 正则 $p_i=\frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$，$S=-\sum_i \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}\left(-\beta E_i-\log Z\right)$

$$=\beta\langle E_i\rangle+\log Z \qquad F=-T\log Z$$

$$=\beta(U-F) \quad ✓$$

- 巨正则 … ✓

结论：热力学熵的微观本质是香农熵（信息熵）.

二、冯诺依曼熵

"某概率处于某态"的量子描述：密度矩阵

$\rho=\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ ， $\sum_i p_i=1$， $S(\rho)=-\sum_i p_i\log p_i$

更一般 ρ 有非对角元 $\rho=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$ $S_{vN}(\rho)\equiv-tr[\rho\log\rho]$

$S_{vN}(\rho)$ 又常称纠缠熵．为何能反映纠缠？

三、二分情形(bipartite)的纠缠

$\mathcal{H}=\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B$ $\{|i_A,\alpha_B\rangle\}$ $\dim\mathcal{H}=(\dim\mathcal{H}_A)\times(\dim\mathcal{H}_B)$

问题：若已知整体系统为$|\psi\rangle$，只看A系统，会是什么态？

最简单例子，两个自旋 ， $\mathcal{H}_A\cong\mathcal{H}_B\cong\mathbb{C}^2$．

若系统处于 $|0\rangle_A\otimes|1\rangle_B=|0_A1_B\rangle$．则A为$|0\rangle$，B为$|1\rangle$．

若系统处于 $|01\rangle+|10\rangle$ "叠加态"，则A处于……？

先看A的密度矩阵．若 $\rho_A=|\varphi\rangle\langle\varphi|$，则知A处于$|\varphi\rangle$态．

$\rho_A=\frac{1}{2}|0\rangle\langle0|+\frac{1}{2}|1\rangle\langle1|$ 且无法写成 $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ 形式

*注意不是$|0\rangle$与$|1\rangle$的叠加 $|0\rangle+|1\rangle$，而是混合

并且A与B有关联．即测量后A塌缩至$|0\rangle$，则知整个态塌缩至$|01\rangle$．则知B已为$|1\rangle$． $\Rightarrow$ 纠缠

普遍情形，系统处于 $|\psi\rangle=\sum_{i,\alpha}C_{i\alpha}|i_A\rangle\otimes|\alpha_B\rangle$

1 若 $C_{i\alpha}$ 可分解为 $C_i^A\cdot C_\alpha^B$ 则 $\underline{|\psi\rangle=\left(\sum_i C_i^A|i_A\rangle\right)\otimes\left(\sum_\alpha C_\alpha^B|\alpha_B\rangle\right)}$

则A处于 $\sum_i C_i^A|i_A\rangle$ ，B处于 $\sum_\alpha C_\alpha^B|\alpha_B\rangle$

选用合适基底或有 $|\psi\rangle=|i_A\rangle\otimes|\alpha_B\rangle$．但核心在$|\psi\rangle$可分．$|\psi\rangle=|\psi_A\rangle\otimes|\psi_B\rangle$

且两系统无关联（测量A不能知晓B的任何信息）

则称原先大系统可分离态(separable state)

且可算得 $S_A=-tr_A[\rho_A\log\rho_A]=0$

2．若 $|\psi\rangle$不可拆成$|\psi_A\rangle\otimes|\psi_B\rangle$ 则A需用ρ_A描述．

称大系统处于纠缠态(entangled state),

且可算得 $S_A > 0$. 故 $-tr[\rho_A \log \rho_A]$ 可作纠缠之度量