第四次习题课（4月11日）

准备工作

可以 $\sqrt{\frac{kT}{m}}$ 为速度单位，于是有速度单位的物理量都可写成无量纲的形式。

麦克斯韦速度分布：

$$f(\vec{v})=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m\vec{v}^2}{2kT}\right)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp\left(-\vec{v}^2/2\right)$$

速率分布：

$$F(v)=4\pi v^2 f(v)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}v^2\exp\left(-v^2/2\right)$$

高斯积分

$$\int_0^{+\infty}v^n\mathrm{e}^{-v^2/2}\mathrm{d}v\overset{t=\frac{v^2}{2}}{=}\int_0^{+\infty}(2t)^{(n-1)/2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=2^{(n-1)/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

其中的 Γ 函数定义为 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$，常用取值为 $\Gamma(n+1)=n!$ 以及 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$。

第一题

速率倒数的平均值：

$$\left\langle\frac{1}{v}\right\rangle=\int_0^{+\infty}\frac{1}{v}F(v)\mathrm{d}v=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\left(=\sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}\right)$$

而平均速率为

$$\langle v\rangle=\int_0^{+\infty}vF(v)\mathrm{d}v=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

第二题

单位时间由**单位面积**泻出的气体分子数量（泻流流量）：$\Gamma=nu$，其中 n 为粒子数密度，u 称作平均泻流速率。用麦克斯韦速度分布可求得（三维情形）$u=\frac{1}{4}\bar{v}$。

单位时间通过面积为 A 的小孔的气体质量则为 $mnAu$。于是此题情境中，单位时间通过小孔的气体净质量为

$$m(n_1-n_2)Au=\frac{M_{\mathrm{mol}}}{N_A}\left(\frac{p_1-p_2}{kT}\right)A\frac{\bar{v}}{4}=\sqrt{\frac{M_{\mathrm{mol}}}{2\pi RT}}A(p_1-p_2)$$

其中用到等式 $M_{\mathrm{mol}}=mN_A$ 以及 $R=kN_A$。

第三题

二维的麦克斯韦速度分布为（仍然以 $\sqrt{kT/m}$ 为速度单位）

$$f(\vec{v})=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\vec{v}^2/2\right)$$

以及速率分布

$$F(v)=2\pi vf(v)=v\exp\left(-v^2/2\right)$$

方均根速率为

$$\left(\int_0^{+\infty}v^2F(v)\mathrm{d}v\right)^{1/2}=\sqrt{2}$$

平均速率为

$$\int_0^{+\infty} vF(v)\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

最概然速率为使速率分布函数最大值的速率：

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v} = 0 \Rightarrow v = 1$$

第四题

设地球质量为 M。不考虑地球自转，高度 h 处引力势能为

$$E(h) = -\frac{GMm}{R_\mathrm{E}+h} = -\frac{GMm}{R_\mathrm{E}^2}\frac{R_\mathrm{E}^2}{R_\mathrm{E}+h} = -mgR_\mathrm{E}\frac{R_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}+h}$$

此处 g 为地面（$h=0$）重力加速度。

由玻尔兹曼分布以及理想气体状态方程得

$$\frac{p(h)}{p(0)} = \frac{n(h)}{n(0)} = \frac{\exp\left(\frac{mgR_\mathrm{E}}{kT}\frac{R_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}+h}\right)}{\exp\left(\frac{mgR_\mathrm{E}}{kT}\right)} = \exp\left(-\frac{mgR_\mathrm{E}}{kT}\frac{h}{R_\mathrm{E}+h}\right)$$

第五题

考虑分子的速率在一个小段 $v_0 \sim v_0 + \mathrm{d}v$ 内，**此事件的概率**为 $F(v)\mathrm{d}v$。同样是这个事件用能量描述，即能量处于 $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_0 + \mathrm{d}\varepsilon$ 区间内（其中 ε_0 是对应速率 v_0 的能量，即 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$），概率应该为 $f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$。同一个事件的概率用两个方法计算，也该相等，于是应有

$$f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = F(v)\mathrm{d}v$$

即有

$$f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\frac{2\varepsilon}{m}\exp\left(-v^2/2\right)\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\mathrm{e}^{-\varepsilon/kT}\sqrt{\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon$$

最概然能量由态密度函数最大值点得到

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varepsilon} = 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}kT$$

第六题

披着物理皮的概率题。

【解】（1）由图 3-4 可知：

$$Nf(v)=\begin{cases}\frac{a}{v_0}v, & 0<v<v_0;\\ a, & v_0\leqslant v\leqslant 2v_0;\\ 0, & v>2v_0.\end{cases}$$

这 N 个假想的粒子虽然不遵从麦克斯韦速率分布律，但根据速率分布函数 $f(v)$ 的物理意义，它必须满足归一化条件：

$$\int_0^{+\infty} f(v)\,\mathrm{d}v=1.$$

所以，

$$\int_0^{v_0}\frac{a}{v_0 N}v\,\mathrm{d}v+\int_{v_0}^{2v_0}\frac{a}{N}\mathrm{d}v=1,$$

由此式得出

$$a=\frac{2N}{3v_0}.$$

（2）根据速率分布函数的定义：

$$f(v)=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v},$$

而定义在 $v_0\leqslant v\leqslant 2v_0$ 区间内的分布函数 $f(v)=a/N$，所以，速率在 $1.5v_0$ 到 $2.0v_0$ 之间的粒子数

$$\Delta N=\int_{1.5v_0}^{2.0v_0}Nf(v)\,\mathrm{d}v=\int_{1.5v_0}^{2.0v_0}N\cdot\frac{a}{N}\mathrm{d}v=\frac{a}{2}v_0=\frac{N}{3}.$$

（3）分子的平均速率

$$\bar{v}=\int_0^{2v_0}vf(v)\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{v_0}\frac{av^2}{Nv_0}\mathrm{d}v+\int_{v_0}^{2v_0}\frac{av}{N}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{11}{6}v_0^2\frac{a}{N}=\frac{11}{9}v_0.$$

第七题

(1)

问：分量 v_x 的概率密度函数？即为标准正态分布（以 $\sqrt{kT/m}$ 为速度单位） $f(v_x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-v_x^2/2}$.

于是所求概率为（用到最概然速率 $v_{\max}=\sqrt{2}$）

$$P(0\leq v_x\leq v_{\max})=\int_0^{\sqrt{2}}f(v_x)\mathrm{d}v_x=\frac{1}{2}\mathrm{erf}(1)$$

于是所求分子数为 $NP=\frac{N}{2}\mathrm{erf}(1)$

(2)

概率为

$$P\left(v_x\geq v_0\right)=\int_{v_0}^{+\infty}f\left(v_x\right)\mathrm{d}v_x\overset{v_x=\sqrt{2}u}{=}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x_0}^{+\infty}\exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(1-\mathrm{erf}(x_0))$$

上式变量替换后的积分限变换仍然用到了最概然速率为 $v_{\max}=\sqrt{2}$，即 $v_0/\sqrt{2}=v_0/v_{\max}=x_0$。

(3)

所求概率为

$$P(v \leq v_0) = \int_0^{v_0} F(v)\mathrm{d}v = \int_0^{x_0} \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2)\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_0} \left[\exp(-u^2)\mathrm{d}u - \mathrm{d}(u\exp(-u^2))\right] = \mathrm{erf}(x_0) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x_0 \exp(-x_0^2)$$

(4)

直接是上题结果的反面：

$$\Delta N\left(v \geqslant v_0\right) = N - \Delta N\left(v < v_0\right) = N\left[1 - \mathrm{erf}(x_0) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} x_0 \mathrm{e}^{-x_0^2}\right]$$