第五次习题课（5月9日）

概率统计基础

频率、概率、概率密度

扔 N 次骰子，点数为 3 共 n 次，则称点数为 3 这个**事件**（在这些试验里）频率为

$$f = \frac{n}{N}$$

试验次数很大时，频率会趋向某个值，这个（抽象的、理想的）值即为概率。所有不相交事件的概率和为 1：

$$\sum_i P_i = 1$$

有些量的具体取值实际上不能肯定，即称作随机变量（random variable）。比如把 X 定义为扔完骰子朝上的那一面点数，此即为随机变量，取值为从 1 到 6 的整数。还可以定义不同随机变量，比如把 Y 定义为朝上点数的 3 倍，这也是个随机变量，取值在集合 $3, 6, 9, 12, 15, 18$ 中；并且可以说随机变量 Y 是随机变量 X 的函数。又或者把 W 定义为朝上点数除以 2 的余数，则取值为 0 或 1.

上文举例随机变量取值范围有限。有些随机变量取值范围无限但离散，比如某店铺一天内顾客。还有些随机变量连续取值（或者本身连续，但太紧密，实际中完全可以看成连续，方便计算），比如往一块区域里投飞镖投中的位置 $\boldsymbol{r}$，又比如平衡态气体中，某时刻观测到某个分子的速度 $\boldsymbol{v}$.

连续的随机变量严格讨论取某个点的概率都应为零，非零概率只能对应状态空间中有限大小的区域。设状态空间中某点 x_0 附近范围 $U(x_0)$ 机会近似相等。则在此点附近范围 $U(x_0)$ 内概率正比于其长度 Δx（体积、面积，依维数定），比值定义为此点的概率密度，即

$$P(x \in U(x_0)) = f(x_0)\Delta x$$

随机变量取值处于某个区间的概率即为相应区间概率密度的积分：
$P(x \in A) = \sum_{x\in A} f(x)\Delta x = \int_A f(x)\mathrm{d}x$，中间式对 $x \in A$ 求和应理解为每个像素里只取一个代表点。

- 往面积为 4 的正方形内随机投飞镖，投中某个面积为 ΔS 区域 A 的概率为 $P(\boldsymbol{x} \in A) = \Delta S/4$，每一点的概率密度为 $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4}$（为什么？）。即 $P(\boldsymbol{x} \in A) = \int_A f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^2x = \Delta S/4$.
- 某学校同学身高可取值为连续，设其分布的概率密度函数为 $h(x)$，其中 x 表示身高，则随机抽取一名同学，其身高在 150 cm 到 170 cm 的概率为 $P(150 \leqslant x \leqslant 170) = \int_{150}^{170} h(x)$。
- 平衡态气体，其速率的概率密度函数为 $F(v)$，则速率处于某个范围 $[v_1, v_2]$ 的概率为 $\int_{v_1}^{v_2} F(v)\mathrm{d}v$.
- 速度的概率密度函数为 $f(\boldsymbol{v})$，则速度处于速度空间中某个区域 Ω 的概率为$\int_\Omega f(\boldsymbol{v})\mathrm{d}^3v$.

平均值（期望）

设扔了 10 次骰子，五次朝上点数为 1，三次为 4，两次为 5. 总点数为 27，则平均每次点数为 $27/10 = 2.7$. 或

$$\bar{X} = \frac{\sum_i x_i n_i}{N} = \sum_i x_i f_i$$

此处 X 抽象地表示随机变量，而 x_i 表示某个具体取值，比如 3 或 5.

把频率替换成概率，则平均值（也称期望，expectation）为

$$\mathbb{E}(X)=\sum x_i p_i$$

对于连续型随机变量，其数学期望为

$$\mathbb{E}(X)=\int x f(x)\mathrm{d}x$$

书籍推荐

S.J. Blundell & K.M. Blundell. *Concepts in Thermal Physics*, Oxford University Press, 2009.

或其中译版：《热物理概念——热力学与统计物理学(第2版)》

- 1.1-1.3
- 3.1-3.6

第一题

1.1

直接用泻流流量求得

$$\Gamma\Delta S=\frac{1}{4}n\bar{v}\Delta S=\frac{1}{4}\frac{p}{kT}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\Delta S=\frac{p\Delta S}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

附注：也可从物理情景估计。设所求量为 X，即单位时间由此孔泻流出的分子数目为 X。则 Δt 时间由此孔泻流出的分子数为 $X\Delta t$。这些分子携带总动量大约为 $X\Delta tmv$。此处 v 可以解释为平均速率，也可以解释为最概然速率，都无所谓，反正大致为 $v\sim\sqrt{kT/m}$。这些分子应该产生的力为 $\frac{X\Delta tmv}{\Delta t}\sim Xmv$ ；而这个力用压强表示为 $p\Delta S$。于是有

$$X\sim\frac{p\Delta S}{mv}\sim\frac{p\Delta S}{m\sqrt{\frac{kT}{m}}}\sim\frac{p\Delta S}{\sqrt{mkT}}$$

1.2

温度恒定（泻流本来会使温度降低，但题目要求维持温度不变），体积恒定，则压强正比于分子数：

$$p=\frac{N}{V}kT\propto N$$

经过 Δt 时间，分子数的变化量为

$$\Delta N=-\Gamma\Delta S\Delta t=-\frac{1}{4}\frac{N}{V}\bar{v}\Delta S\Delta t$$

即有微分方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{4}\frac{N}{V}\bar{v}\Delta S$$

解得 t 时刻与初始 $t=0$ 时刻分子数目关系为

$$N(t)=N(0)\exp(-\lambda t)$$

其中 $\lambda=\frac{\bar{v}\Delta S}{4V}$.

没学过微分方程的话对两边积分也行。

分子数目减小到初始一半，亦即压强减小到初始的一半所需时间 $t_{1/2}$ 满足

$$N(t_{1/2})/N(0)=1/2$$

代入解得

$$t_{1/2}=\frac{4V\ln 2}{\bar{v}\Delta S}$$

原子核衰变

原子核衰变服从量子力学规律，每个原子核发生衰变的精确时刻不能预测，但对于足够多核素的集合，衰变的统计规律可以确定：

$$\mathrm{d}N=-\lambda N\mathrm{d}t$$

同样解得

$$N(t)=N(0)\exp(-\lambda t)$$

把放射性核素衰变剩一半的时间称为半衰期，同样有：

$$T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}$$

第二题

直接用上题中分子数关于时间的函数关系，再有温度一定时压强正比于分子数，可以得出所求时间为

$$\Delta t=\frac{4V\ln(p/p_0)}{\bar{v}S}=\frac{4V\ln(p/p_0)}{S}\sqrt{\frac{\pi m}{8kT}}$$

其中 p_0 为初始压强，p 为所考虑时刻压强（此题中即为 $1.33\times10^{-4}\mathrm{Pa}$）。为方便计算，利用摩尔质量 μ 与单个分子质量的关系 $\mu=mN_{\mathrm{A}}$ 以及 $R=kN_{\mathrm{A}}$ 改写上式并代入数值计算：

$$\Delta t=\frac{4V\ln(p/p_0)}{S}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}}=20.1\mathrm{s}$$

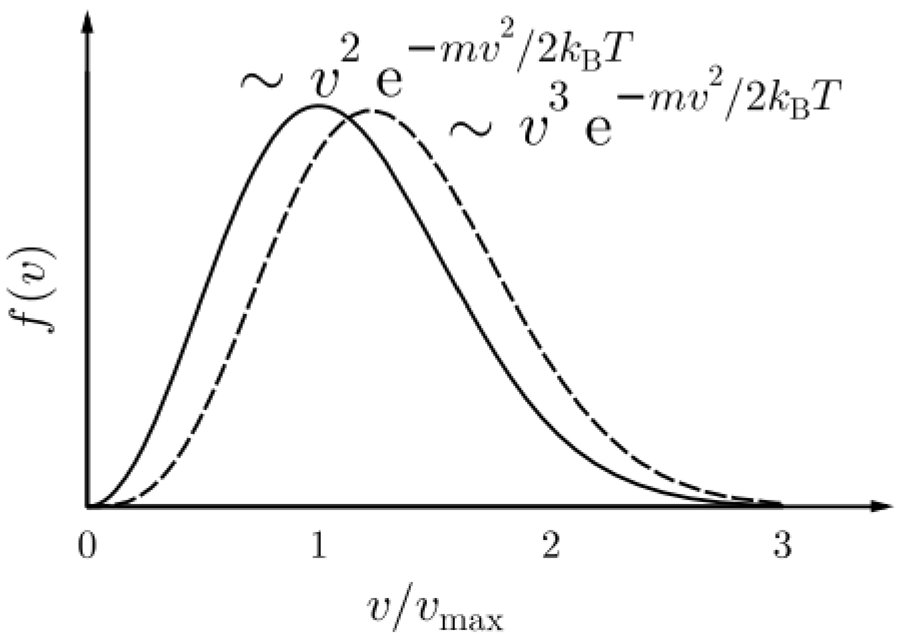
第三题

分子束的速率分布

先不证明，只上结论：分子束速率分布

$$G(v)=\frac{1}{2}v^3\left(\frac{m}{kT}\right)^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\Rightarrow v^3\exp(-v^2/2)$$

与麦克斯韦速率分布的比较，可看出泻流出的分子平均速率要大些。



3.1

最概然速率为使此概率密度函数取最大值的速率，可求得

$$v_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

用 $H(\varepsilon)$ 表示能量的概率密度函数。考虑泻出分子的速率在一个小段 $v_0 \sim v_0 + \mathrm{d}v$ 内，**此事件的概率**为 $G(v)\mathrm{d}v$。同样是这个事件用能量描述，即能量处于 $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_0 + \mathrm{d}\varepsilon$ 区间内（其中 ε_0 是对应速率 v_0 的能量，即 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$），概率应该为 $H(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$。同一个事件的概率用两个方法计算，也该相等，于是应有

$$H(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = G(v)\mathrm{d}v$$

由此得能量分布

$$H(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{(kT)^2}\exp(-\varepsilon/kT)$$

仍求其最大值得到最概然能量 $\varepsilon_{\mathrm{p}} = kT$。

3.2

直接看概率密度函数的表达式。泻流的速率分布表达式比平衡态气体的麦克斯韦**速率**分布多一个因子 v，速率大的本来就占上风。物理角度理解：同样时间，速度相近的分子相比较，跑得快些的分子从小孔泻出更多（也不能快太多，不然概率又被后面的指数压低了）。（或许答案说动态就是这个意思吧）

3.3

概率与概率密度。

以速率为参考。取**相同**的各 $\mathrm{d}v$，则速率处于某个范围的概率（即 $G(v)\mathrm{d}v$ ）最大时，对应的概率密度也是各 $G(v)$ 中最大的。记这个对应速率为 v_{p}，其概率密度为 $G(v_{\mathrm{p}})$. 但换算成能量后其概率密度 $H(\varepsilon = mv_{\mathrm{p}}^2/2)$ 也是各 $H(\varepsilon)$ 中最大的吗？不见得。因为对应的 $\mathrm{d}\varepsilon$ 不同。

或写成

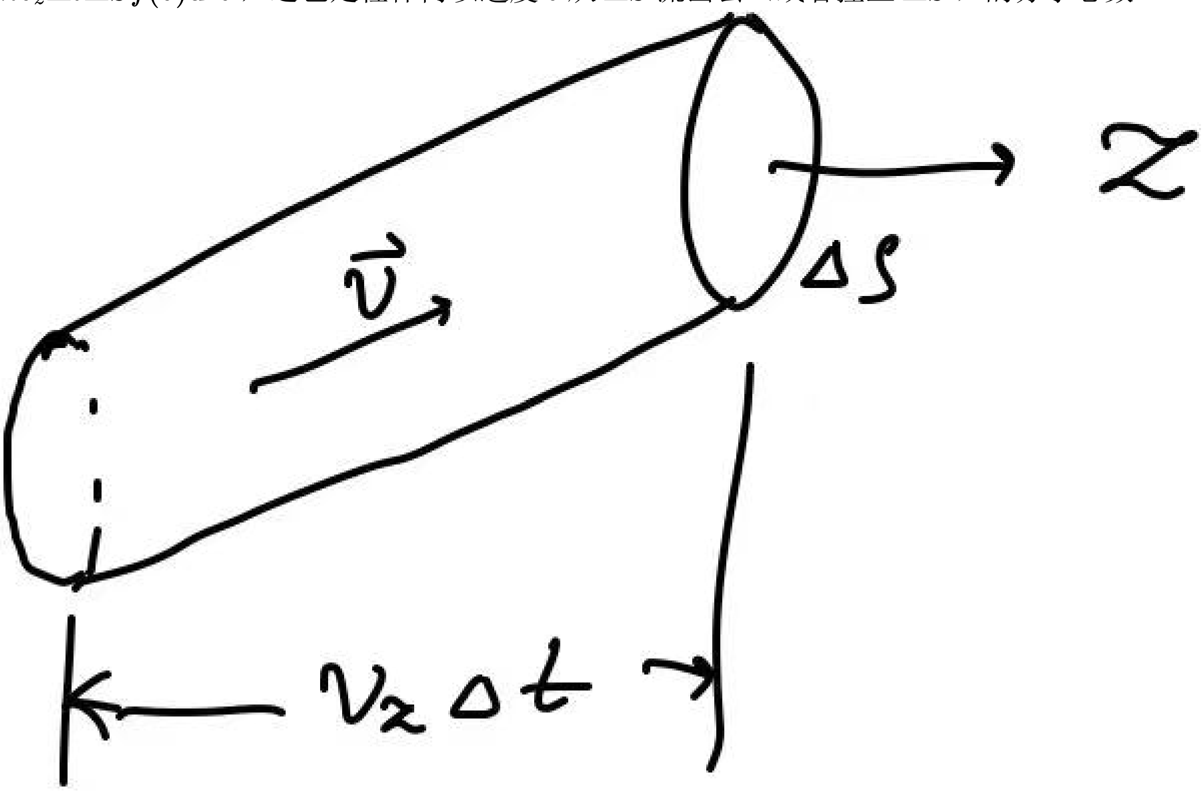
$$H(\varepsilon(v))=\frac{G(v)}{mv}$$

$G(v)$ 取最大值处不是 $H(\varepsilon(v))$ 取最大值处。

最极端的例子：速率 v 是速度 $\boldsymbol{v}$ 的函数。各有概率密度函数。速度的概率密度函数最大值在 0 处取得，而（从二维开始）速率显然不是。

泻流严格推导

某个速度 $\vec{v}$ 体元里的分子，在 Δt 时间内，要能从面积元 ΔS 泻流出去的，必须处于小柱体内，柱体体积为 $v_z\Delta t\Delta S$，柱体内分子总数为 $nv_z\Delta t\Delta S$。但这个柱体里的分子却不全为速度 $\vec{v}$（在柱体内画分子向各个方向运动）：确为此速度的概率为 $f(\vec{v})\mathrm{d}^3v$。于是柱体内以速度 $\vec{v}$ 运动的分子数为 $nv_z\Delta t\Delta Sf(\vec{v})\mathrm{d}^3v$，这也是柱体内以速度 $\vec{v}$ 从 ΔS 流出去（或者撞上 ΔS ）的分子总数



泻流出去的分子的速度的分布函数

$$g(\boldsymbol{v})=Cv_zf(\boldsymbol{v})$$

上式的速度 $\boldsymbol{v}$ 需限定在向外方向，即 $v_z>0$。

为求系数，用泻流速度分布函数归一化

$$1=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}v_z\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v_y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v_xCv_zf(\boldsymbol{v})=C\int_0^{+\infty}\mathrm{d}v_zv_zf_z(v_z)=C\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

最后得到泻流分子的速度分布函数（此处取了 $\sqrt{kT/m}=1$ 的单位制）

$$g(\boldsymbol{v})=\{\sqrt{2\pi}v_zf(\boldsymbol{v}),v_z\geqslant 0\text{（此处换行）}\ 0,v_z<0.$$

此分布不是各向同性的。

求速率分布对球壳积分即可

$$G(v)\mathrm{d}v = \int g(\boldsymbol{v}) v^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}v = \frac{1}{2} v^3 \left(\frac{m}{kT}\right)^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

上式中恢复了正常单位。

第四题

4.1

单位体积分子数，也就是分子数密度，用理想气体状态方程求出

$$n = \frac{p}{kT} = 3.22 \times 10^{17} \mathrm{m}^{-3}$$

平均自由程为

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n\sigma} = 7.77 \mathrm{m}$$

此距离相当相当相当相当相当相当......长。标准状况空气分子平均自由程约为分子直径 200 倍，此处为约为 $3 \times 10^{10} = 30000000000$ 倍。把分子放大到人的身高，其平均自由程会放大成 100 倍地月距离。

平均碰撞频率为碰撞一次平均所需时间的倒数

$$\bar{Z} = \bar{v}/\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 60.2 \mathrm{s}^{-1}$$

4.2

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = 2.74 \times 10^{-10} \mathrm{m}$$

第五题

【分析】 在这里的温度梯度不是常量，即

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \neq \frac{T_1 - T_2}{R_1 - R_2},$$

否则，若把内筒和外筒之间的空间分割为一系列厚度相等的圆柱壳层，按照

$$\mathrm{d}Q = -\kappa \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \cdot 2\pi rL \cdot \mathrm{d}t$$

这一计算公式，r 从 R_1 逐步变化到 R_2，则在 $\mathrm{d}t$ 时间内，由内筒向外传递的热量将逐步增加，这不符合稳态传热(在 $\mathrm{d}t$ 时间内，在每一圆柱面上通过的热量应该是相等的)条件. 唯一的可能是在内筒和外筒之间的温度梯度不是常量. 为此必须取半径为 r—$r+\mathrm{d}r$ 的某一圆柱壳层为对象，研究它的传热过程.

【解】 设在 $\mathrm{d}t$ 时间内，由内筒向外传递的热量为常量 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \dot{Q}$. 现在取半径 r—$r+\mathrm{d}r$ 的某一圆柱壳层为研究对象，则有

$$\dot{Q} = -\kappa \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \cdot 2\pi rL,$$

分离变量，有

$$\frac{\dot{Q}\mathrm{d}r}{2\pi rL\kappa} = -\mathrm{d}T,$$

两边积分，可以得到

$$\dot{Q} = \frac{2\pi\kappa L}{\ln\frac{R_2}{R_1}}(T_1 - T_2).$$

第六题

泊肃叶公式

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi r^4}{8\eta}\frac{\Delta p}{l}$$

其中两容器压强差为 $\Delta p = \rho g \Delta H$.

而根据几何关系又有

$$\mathrm{d}V = -\frac{\pi a^2}{2}\mathrm{d}(\Delta H)$$

得 ΔH 随时间变化的的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\Delta H}{\mathrm{d}t} = -\frac{\rho g a r^4 \Delta H}{4\eta a^2 l}$$

又是这种方程！

最后结果为

$$t = \frac{4a^2\eta l \ln 2}{r^4 \rho g}$$

第七题

设 ΔS 为内圆筒外壁的面积，则由黏滞定律得黏滞力为

$$f=-\eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\Delta S=-\eta\frac{\omega(R+\delta)}{\delta}2\pi RL$$

计算速度梯度时直接把内外速度相除，因为间距太小（类比求导数直接把坐标差相除）。黏滞力给内圆筒得力矩与扭丝的力矩平衡：

$$fR=M$$

代入 f 的表达式后求得黏度，得证。

第八题

梯度为 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$. 由傅里叶传导定律知, 该热传导过程中, 单位时间内通过单位面积传输的热流 (热流密度) 为

$$H = -\kappa \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\,.$$

因为稀薄气体系统的热导率可以由其密度 ρ、组分粒子的平均速率 $\bar{v}$ 和平均自由程 $\bar{\lambda}$, 以及系统的定体比热容 c_V 表示为

$$\kappa = \frac{1}{3}\rho\bar{v}\bar{\lambda}c_V\,,$$

于是有

$$H = -\frac{1}{3}\rho\bar{v}\bar{\lambda}c_V\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\,. \tag{1}$$

记稀薄气体中 A, B 两板之间的间距为 L, 温度分别为 T_A, T_B, 依题意, 两板间气体的温度梯度为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{T_A - T_B}{L}\,. \tag{2}$$

由于两板之间的稀薄气体分子的碰撞既有气体分子与气体分子之间的碰撞, 又有气体分子与板面之间的碰撞, 因此气体分子从板 A 运动到板 B 可能至少碰撞两次, 于是

$$\bar{\lambda} = \frac{L}{2}\,. \tag{3}$$

将 (2) 式和 (3) 式代入 (1) 式, 则得

$$H = -\frac{1}{3}\rho\bar{v}\frac{L}{2}c_V\frac{T_A - T_B}{L} = -\frac{1}{6}\rho\bar{v}c_V(T_A - T_B)\,.$$

所以, 处于密度为 ρ、气体分子的平均速率为 $\bar{v}$ 的稀薄气体中的温度分别为 T_A, T_B 的两板在单位时间内通过单位面积传递的热量的数值为 $Q = \dfrac{1}{6}\rho\bar{v}c_V|T_A - T_B|$.

[证毕]